Программа курса «Линейная алгебра»

Курс линейной алгебры является частью обязательного математического курса, рассчитан на один семестр. Требования к студентам – основные знания по курсу математического анализа (семестр 1). Курс является первым достаточно абстрактным математическим курсом, приложения которого будут применяться во многих следующих обязательных и необязательных курсах, прежде всего в теории вероятностей, в эконометрике, в дифференциальных уравнениях, математическом анализе многих переменных. Сложность курса определяется, прежде всего, его абстрактностью. Разнообразные примеры, разобранные в курсе, помогут студентам применять материал курса в других предметах. Другой образовательной целью курса является навык работы с абстрактными понятиями, овладение теоретическим материалом, практическое значение которого в основном будет освоено позже.

В курсе сделан максимальный, насколько это возможно в непрофильном математическом курсе, упор на бескоординатные методы рассуждений.

Формы контроля:
40% - экзаменационная контрольная работа, блокирующая
30% - промежуточная контрольная работа
30% - работа в течение семестра, в том числе домашние задания

Курс содержит некоторое количество дополнительных тем, необязательных к прохождению. У каждого студента есть возможность изучить эти темы с помощью преподавателей во время дополнительных занятий, однако в обязательную часть курса они не входят.

Литература

1. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин. Линейная алгебра и геометрия (КМ)
2. Проскуряков Сборник задач по линейной алгебре

Тема 1. Линейные (векторные) пространства (КМ, глава 1)

Линейные пространства
Определение линейного пространства. Примеры: координатное пространство, пространства функций. Подпространство. Линейные условия. (КМ, с.7-14)

Примеры заданий.
1. Является ли линейным пространством множество непрерывных функций на отрезке?
2. Является ли линейным пространством множество решений данного однородного линейного уравнения?
3. Является ли линейным пространством множество решений данного дифференциального уравнения?

Базис и размерность
Базис**.** Определение. Основные примеры. Теорема о независимости количества элементов в базисе от базиса. Размерность. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Теорема о продолжении базиса. Монотонность размерности. (КМ, с.14-21)

Примеры заданий.
1. Найти базис данного конечномерного пространства.
2. Найти размерность данного пространства.

Линейные отображения
Определение. Примеры. Изоморфизм пространств одной размерности. Ядро и образ линейного отображения. (КМ, с.21-27)

Примеры заданий.
1. Построить изоморфизм двух данных пространств
2. Доказать, что два данных конечномерных пространства не изоморфны.

Матрицы
Определение. Матрицы специального вида. Матрица линейного отображения. Алгебра матриц. Матрица композиции линейных отображений. Переход от одного базиса к другому. Определитель и след оператора. (КМ, с.27-38)

Примеры заданий.
1. Найти сумму, произведение данных матриц.
2. Записать в координатах данное отображение.
3. Найти определитель данной матрицы (2x2, 3x3, матрицы специальных видов, разложив по минорам)
4. Вычисления следа оператора.

Подпространства и прямые суммы
Сумма линейных подпространств. Размерность суммы линейных подпространств. Прямая сумма. Разложение пространства в прямую сумму. Прямые дополнения. Прямые суммы линейных отображений. Ориентация. (КМ, с.38-47)

Примеры заданий.
1. Исследовать возможные взаимные расположения трёх плоскостей в пространстве.

Факторпространства
Определение. Корректность определения. Конечномерная альтернатива Фредгольма. (КМ, с.47-51)

Комплексные числа. Линейные пространства над полем комплексных чисел.
Определение комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Пространство комплексных чисел. Формулировка основной теоремы алгебры.

Примеры заданий.
1. Решение уравнений 2 и 3 степени над полем комплексных чисел.

Структура линейного отображения
Теорема о структуре линейного отображения. Диагонализируемые операторы. Собственные подпространства. Характеристический многочлен. Инвариантность характеристического многочлена относительно замены базиса. Собственные значения оператора и корни характеристического многочлена. (КМ, с.54-61)

Примеры заданий.
1. Привести данный диагонализируемый оператор к диагональному виду

2. Выписать характеристический многочлен данного оператора
3. Найти собственные значения данного оператора.

Функции от матриц и жорданова нормальная форма
Жорданова клетка. Пример: дифференциальные уравнения. Теорема Гамильна-Кэли. Определение жорданова базиса. Жорданова нормальная форма. Возведение матрицы в степень и другие функции от матриц. (КМ, с.61-68)

Примеры заданий.
1. Привести данную матрицу к жордановой нормальной форме, найти жорданов базис
2. Вычислить в общем виде n-ную степень данной матрицы.

Тема 2. Пространства со скалярным произведением (КМ, глава 2)

Скалярное произведение
Полилинейные отображения. Определение, свойства. Скалярное произведение. Способы задания. Матрица Грама. Изменение матрицы Грама при замене базиса. Симметричные скалярные произведения. Невырожденное скалярное произведение. (КМ, с.95-102)

Примеры заданий.
1. Выписать матрицу Грама для данного скалярного произведения.
2. Выписать матрицу Грама при данной замене базиса.

Процесс ортогонализации
Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональные многочлены. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Изменение квадратичной формы при преобразовании базиса. Приложение: экстремумы функций многих переменных. (КМ, с.110-117, 155-163)

Примеры заданий.
1. Найти ортогональный базис в данном подпространстве
2. Привести данную квадратичную форму к сумме квадратов.
3. Исследовать экстремум данной функции нескольких переменных.

Дополнительная часть:

Евклидово пространство
Определение. Неравенство треугольника. Углы. Расстояния. Метод наименьших квадратов. N-мерный объём. Куб, шар, эллипсоид. (КМ, с.117-126)

Ортогональные и унитарные операторы
Унитарные пространства. Ортонормированный базис. (КМ, с.126-133)

Ортогональные операторы
Изометрия. Запись ортогонального оператора в ортонормированном базисе. Специальные операторы. Теорема Эйлера. . (КМ, с.133-137)

Дополнительные темы:

Тема 3. Проективные преобразования (КМ, глава 3)

Тема 4. Тензоры. Внешние формы. (КМ, глава 4)

Тема 5. Реккурентные соотношения.